323. 多元環ノ Ideal ノ最小公倍數, 最大公約數, II.

中山　正（阪大）

__§1__ 訂正. 本誌71号308ニ於テ或ル多元環Aノ中ノ二ツノ normal ナ Ideal ノ Summe, Durchschnitt ガヤハリ normal ナ Ideal ナル為メノ必要且ツ充分ナ條件ヲ述ベマシタガ, ソコニ述ベタ條件デハ A/K ヲ normal-einfach トスベキデシタ、一般ノ einfach, 更ニ一般ノ halbeinfach ナ A/K ニ於テハ同稿 14頁 15行目ノ「K ノ如何ナル Primideal $\mathfrak{p}$」ト云フ代リニ「A ノ Zentrum ノ如何ナル Primideal $\mathfrak{p}$」トスベキデシタ。Radikal ヲ有スル多元環Aニ於テハ A/R（R ハ Radikal）ヲ考察スレバヨイ。

__§2__ 二ツノ Maximalordnung. 以下簡單ノタメ A/K ハ normal-einfach トスル（Kハ勿論代数体）. 一般ノ Ideal ハシバラク措キ, 特ニ二ツノ Maximalordnung

$\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}}$ ノ Durchschnitt $\mathfrak{o} \frown \bar{\mathfrak{o}}$ ヲ考ヘルト、コレハ兎モ角Aニ於ケル一ツノ Ordnung ヲナスガ、$\mathfrak{o} \neq \bar{\mathfrak{o}}$ ナラバ確カニ Maximalordnung デナイ。而シテ Summe $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ (前稿デハ記号 $(\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}})$ ヲ使ッタガ，以下＋ニカヘル) ハ $\mathfrak{o} \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ノ zweiseitig ナ (normal ナラザル) Ideal ナルコトハ明カデアルガ，更ニソノ Links- 並ビニ Rechtsordnung ハ丁度 $\mathfrak{o} \frown \bar{\mathfrak{o}}$ ニナル。即チ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ハ $\mathfrak{o} \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ヲ Links- 及ビ Rechtsordnung ニモツ gleichseitig ナ (normal ナラザル) Ideal デアル (normal ナルノハ $\mathfrak{o}$ ト $\bar{\mathfrak{o}}$ ガ一致スル時ニ限ル)。

証明. ヤハリ im Kleinen ニモッテ行ク. 而シテシバラク K ヲ p 進数体トスル. 先ヅ ξ ヲ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Rechtsordnung ノ元トスレバ

$$(\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}})\xi \subseteqq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}} \quad \text{即チ} \quad \mathfrak{o}\xi \subseteqq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}, \quad \bar{\mathfrak{o}}\xi \subseteqq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$$

デアル、假ニ $\xi \notin \mathfrak{o}$ トスル。然ラバ $\mathfrak{o}\xi+\mathfrak{o}$ ハ ganz ナラザル $\mathfrak{o}$ ノ左 Ideal デアル。ヨッテ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ガ $\mathfrak{o}$ ノ ganz デナイ左 Ideal ヲ含ムコトニナル、ソレガ矛盾ナルコトヲ述ベル。

例ノ如クAヲ多元体 D ノ Matrizenalgebra トシテ，シカモ $\mathfrak{o}$ ガ $\mathfrak{o}_D$ ノ ($\mathfrak{o}_D$ ハ D ノ Maximalordnung トス) 行列全体カラ成ル様ニ表現スル。$A = D_r$. $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ左 Ideal トスレバ $\mathfrak{a}$ ノ行列ノ各行ハ r 次ノ Vektor カラナルアル $\mathfrak{o}_D$-Modul ノ Vektor ヲ任意ニウゴク、$\mathfrak{a}$ ガ

gang デナケレバ $\mathfrak{O}$ ニ含マレナイ $\mathfrak{a}$ ノ元ガアルカラ、ソノ一ツヲ $\alpha=(\alpha_{ik})$ $(\alpha_{ik}\in D)$ トシ, α_{ik} ノ中デソレヲ丁度割ル $\mathfrak{p}_D$ ($\mathfrak{p}_D$ ハ D ノ *Primideal*) ノ冪ガ最低トナルモノノ一ツヲ $\alpha_{i_0k_0}$ トスル。

$$\mathfrak{p}_D^a \,\|\, \alpha_{i_0,k_0},\quad a<0\ ;\quad \mathfrak{p}_D^a \,|\, \alpha_{ik}\quad (i,k=1,2,\cdots\cdots,r)$$

然ラバ $\mathfrak{a}$ ニハ第 k_0 行ガ $(\alpha_{i_01},\alpha_{i_02},\cdots\cdots,\alpha_{i_0r})$ ガアッテ他ハスベテ 0 ナル行列ガアル. ヨッテ若シ $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{O}+\bar{\mathfrak{O}}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{O}}$ ニハ第 k_0 行ガヤハリ $(\alpha_{i_01},\cdots\cdots,\alpha_{i_0r})$ デ他ハスベテ $\mathfrak{O}_D$ ノ元デアルヤウナ行列ガアル、ソレヲ α_1 トスル、ソシテ $\alpha_1^2=(\beta_{ik})$ トスレバ容易ニワカル如ク ($a<0$ ニ注意サレタイ), スベテノ β_{ik} ハ $\mathfrak{p}_D^{2a}$ デワレ, $\beta_{k_0k_0}$ ハ丁度 $\mathfrak{p}_D^{2a}$ デ, 第 k_0 以外ノ他行ノ元ハ $\mathfrak{p}_D^{2a}$ ヨリ實際高イ冪デワレル。同様ニ $\alpha_1^4=(\gamma_{ik})$ トスレバ、ドノ γ_{ik} モ $\mathfrak{p}_D^{4a}$ デワレ, $\gamma_{k_0k_0}$ ハ丁度 $\mathfrak{p}_D^{4a}$ デ, 第 k_0 以外ノ行ノ元ハソレヨリ実際高イ冪デワレル、カクシテ結局 $\bar{\mathfrak{O}}$ ノ中ニハソレガ含ム $\mathfrak{p}_D$ ノ冪ガイクラデモ低イ元ヲモツ行列ガ存在スルコトニナリ, ソレハ矛盾デアル。ヨッテ $\mathfrak{a}\not\leqq\mathfrak{O}+\bar{\mathfrak{O}}$ ガ, 従ッテモトニ戻ッテ $\xi\in\mathfrak{O}$ ガ証明サレタ. 同様ニ $\xi\in\bar{\mathfrak{O}}$ トナリ $\mathfrak{O}+\bar{\mathfrak{O}}$ ノ *Rechtsordnung* ハ $\mathfrak{O}\cap\bar{\mathfrak{O}}$ トナル。同様ニ *Linksordnung* モソウデアル。*im grossen* ニウツルノモ大シテ困難ハナイ、証明オハリ。

§3. (*normal* ナ) *Ideal* ヲニツノ *Hauptideal*

ノ Summe トシテ表ハスコト。ヨク知ラレテヰル様ニ代数体ノ Ideal ハ二ツノ元デ生成サレル。即チ二ツノ Hauptideal ノ最大公約数トシテ表ハセル。同様ニ A ノアル (normal ナ) Ideal $\mathfrak{a}$ ノ Links- 及ビ Rechts-Ordnung ヲ $\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_R$ トスレバ $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{o}_L$ ノ二ツノ Hauptlinksideal ノ Summe トシテ表ハセル。左ノカハリニ右ヲトツテモ同様ナルハ明カ。然ルニ更ニ $\mathfrak{o}_L$ ノ一ツノ Hauptlinksideal 及ビ $\mathfrak{o}_R$ ノ一ツノ Hauptrechtsideal ノ Summe トシテ表ハスコトモ出來ル。更ニ一般ニ任意ニアル Maximalordnung $\mathfrak{o}_1$ ヲ指定シテオイテ $\mathfrak{o}_1$ ノ Hauptrechtsideal (又ハ Hauptlinksideal) ト $\mathfrak{o}_L$ ノ Hauptlinksideal ノ Summe トシテ表ハスコトモ出來ル。

証明ハ代数体ノ場合ト同ジ考ヘデ出來ルカラ省略シマス。

§4. 序デニ A ヲフクム多元環 A′ ニ對スル關係ニツイテ一寸述ベテオク。タトヘバ A ノ Koeffizientenkörper ヲ擴大スルトカ，他ノアル多元環トノ直積ヲツクルトカ，兎モ角 A ヲフクム任意ノ（但シ勿論代数体ノ上ノ）多元環ヲ A′ トスル、$\mathfrak{o}$ ヲ A ノ任意ノ Maximalordnung トスレバ A′ ニハ $\mathfrak{o}$ ヲ含ム Maximalordnung が存在スルコトハ容易ニ証明サレル。ソノ一ツヲ $\mathfrak{o}'$ トスル。$\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ ヲ A ニ於ケル $\mathfrak{o}$ ノ左-Ideal トスレバ A′ ニ於テ $\mathfrak{o}'(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}}), \mathfrak{o}'(\mathfrak{a}\cap\bar{\mathfrak{a}})$ がソレゾレ $\mathfrak{o}'\mathfrak{a}, \mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{a}}$ ノ Summe 及ビ Durchschnitt ニナル、ソレヲ証明スルニハ先ヅ $\mathfrak{o}'\mathfrak{a}+\mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}'(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}})$ ノ

方ハ直チニ証明サレ、ソレカラ前稿ニ一寸述べタ Norm ノ関係ヲ使ヘバ $\mathfrak{o}'\mathfrak{a}\frown\mathfrak{o}'\bar{\mathfrak{a}}=\mathfrak{o}'(\mathfrak{a}\frown\bar{\mathfrak{a}})$ モ証明サレル。(Durchschnitt ノ方モ或ヒハ Summe, Norm ノ関係等ヲ経ナイデ直接ニ云ヘルノカモ知レナイが, 僕ニハ一寸氣ヅキマセン)

兎モ角一ツノ Maximalordnung ノ二ツノ右(又ハ左) Ideal ノ Summe, Durchschnitt ヲ考察スルノハ自然的デアツテ, 前稿ニ述ベタノハ要スルニ im Kleinen デハ単純環ノ二ツノ normal ナ Ideal ノ Summe, Durchschnitt が再ビ normal ニナルノハ此ノ場合及ビ一方が他方ニ含マレルトイフ trivial ナ場合以外ニナイトイフコトデアツタ。而シテソウデナイ場合ニハ最小公倍数, 最大公約数等ト呼ブベキ様ナ意味ハ少シク失ツテキルワケデアルが、然シ§2デ一寸扱ツタ様ニ二ツノ Maximalordnung ノ Durchschnitt, Summe 等ハソノ二ツノ Maximalordnung ノ間ノ関係ヲ考察スル際ニヤハリ必要ナ且ツ興味モアルモノノ様ニ思ハレル、実ハ §2 ヨリモ、モ少シ精シイ結果ヲ出シタイト思ツテヰマスノデ、マタ御報告スル機會モアルコトト思ヒマス。